Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

____

В.Г. Сафонов

31.05.2018

ПРОГРАММА

вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.03 «Математическая физика»

Минск, 2018

СОСТАВИТЕЛИ:

Д.Г.Медведев, декан механико-математического факультета, кандидат физ.-мат.наук, доцент;

А.Л.Гладков зав. кафедрой математической кибернетики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Н.И.Юрчук, профессор кафедры математической кибернетики, доктор физ.-мат. наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики (протокол № 9 от 29 апреля 2018 г.)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 7 от 29 мая 2018 г.)

Ответственный за редакцию А.Л.Гладков

Ответственный за выпуск А.Л.Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На вступительном экзамене по математике в аспирантуру по специальности 01.01.03 «Математическая физика» поступающий должен

знать:

– определения математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает;

– точные формулировки математических теорем;

– формулировки лемм и теорем, используемых при доказательствах.

уметь:

– применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами;

– проверять выполнимость условий теорем, применяемых при доказательствах.

Члены экзаменационной комиссии могут предлагать поступающему в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из программы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I. Алгебра

Тема 1.1 Комплексные числа

Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Полярная система координат. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Понятие корня из комплексного числа, извлечение корня из комплексного числа.

Тема 1.2 Многочлены

Понятие многочлена от одной переменной. Степень многочлена. Неприводимые многочлены. Разложение на неприводимые многочлены. Значение многочлена в точке, корень многочлена. Производная многочлена. Кратность корня.

Тема 1.3 Матрицы

Специальные матрицы: диагональная, нижняя и верхняя треугольные, единичная, нулевая, ступенчатая, вектор-строка, вектор-столбец. Равенство матриц. Сложение матриц, умножение матрицы на скаляр, умножение матриц, транспонирование. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица. Характеристический и минимальный многочлен матрицы. Жорданова клетка, жорданова нормальная форма матрицы. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Определитель Вандермонда.

Тема 1.4 Системы уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная запись системы. Решение системы. Общее и частное решения системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования системы. Свободные и независимые переменные. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

Тема 1.5 Векторные пространства

Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Подпространство. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма и дополнение подпространств.

Тема 1.6 Линейные отображения

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Алгебраические действия над линейными отображениями. Собственные значения и собственные векторы.

Тема 1.7 Формы

Билинейные, полуторалинейные и квадратичные формы. Симметрические, кососимметрические билинейные формы. Ранг формы. Матрица формы. Канонический вид квадратичной формы. Положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатура квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы.

Тема 1.8 Евклидовы и унитарные пространства

Евклидовы и унитарные пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к под-пространству. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства. Сопряженный оператор. Унитарные и самосопряженные операторы.

РАЗДЕЛ II. Геометрия

Тема 2.1 Векторы

Понятие вектора в $\mathbf{R}^3$. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базисы и аффинные реперы. Координаты векторов и точек, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Тема 2.2 Евклидовы пространства

Евклидово точечное пространство $\mathbf{R}^n$, движения пространства и евклидова геометрия.

Тема 2.3 Кривые и поверхности второго порядка

Эллипсы, гиперболы, параболы. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Фигуры второго порядка в $\mathbf{R}^3$.

РАЗДЕЛ III. Топология

Тема 3.1 Метрические и топологические пространства

Замыкание, внутренность и граница множества в метрическом и топологическом пространствах. Ограниченное множество в метрическом пространстве. Полное метрическое пространство. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм.

Тема 3.2 Компактность и связность

Понятие компактности. Критерии компактности метрического пространства. Связность. Понятие связной компоненты топологического пространства. Линейная связность.

РАЗДЕЛ IV. Дифференциальная геометрия

Тема 4.1 Кривые

Понятие кривой. Натуральная параметризация кривой. Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна кривой. Кручение кривой.

Тема 4.2 Поверхности

Понятие поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Типы точек поверхности.

РАЗДЕЛ V. Математический анализ

Тема 5.1 Числа и последовательности

Понятие вещественных чисел. Точные границы числовых множеств. Различные формы полноты множества вещественных чисел. Определение предела последовательности. Предел монотонной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Тема 5.2 Функции одной переменной и ряды

Определение предела функции в точке. Определение непрерывности функции в точке. Понятие равномерной непрерывности. Определение производной и дифференциала функции одной вещественной переменой. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Определение интеграла Римана. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Сходимость ряда Фурье в точке.

Тема 5.3 Функции многих переменных

Понятие дифференцируемости функций многих переменных. Матрица Якоби. Теорема о неявной и обратной функции. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие, достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум функций многих переменных.

Тема 5.4 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Определение интеграла Римана на евклидовых пространствах. Определение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода. Формула Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.

РАЗДЕЛ VI. Теория функций комплексного переменного

Тема 6.1 Аналитические функции

Производная функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Тема 6.2 Степенные ряды и вычеты

Степенной ряд, радиус сходимости, формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация. Основная теорема о вычетах.

РАЗДЕЛ VII. Функциональный анализ

Тема 7.1 Мера и интеграл Лебега

Кольца, алгебры, σ-алгебры множеств. Мера на кольце множеств. σ-аддитивная мера на кольце множеств. Борелевские множества, продолжение меры по Лебегу. Измеримые множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

Тема 7.2 Метрические и нормированные пространства

Сходящаяся последовательность, последовательность Коши в метрических пространствах. Сходимость функциональных последовательностей: точечная сходимость, сходимость почти всюду, равномерная сходимость. Отображения: непрерывные, равномерно непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица. Полное метрическое пространство. Сжимающее отображение. Пополнение метрического пространства. Всюду плотное множество. Норма на векторном пространстве. Банахово пространство. Пространства суммируемых функций.

Тема 7.3 Линейные операторы

Линейный ограниченный оператор. Норма линейного ограниченного оператора. Линейные интегральные операторы. Образ, ядро, график линейного оператора. Обратимый оператор. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Спектр линейного оператора.

Тема 7.4 Гильбертовы пространства

Скалярное произведение. Гильбертово пространство. Ортогональные векторы. Проекция вектора. Базис в нормированном векторном пространстве, в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по ортонормированной системе в гильбертовом пространстве.

Тема 7.5 Сопряженное пространство

Линейный ограниченный функционал. Пространство, сопряженное к нормированному векторному пространству. Сопряженный оператор к линейному ограниченному оператору.

Тема 7.6 Компактные операторы

Предкомпактные, компактные множества в метрическом пространстве. Компактные операторы.

РАЗДЕЛ VIII. Теория вероятностей

Тема 8.1 Вероятность

Элементарное событие, случайное событие, пространство элементарных событий. Алгебра и σ-алгебра событий. Вероятностное пространство, вероятность. Классическое, конечное, дискретное, геометрическое вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий. Схема Бернулли.

Тема 8.2 Случайные величины и независимость

Случайная величина, ее функция распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность вероятности. σ-алгебра, порожденная случайной величиной. Распределение вероятностей, независимость случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции.

Характеристическая функция случайной величины.

Тема 8.3 Последовательности случайных величин

Центральная предельная теорема, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел. Понятие о случайном процессе, пуассоновский случайный процесс, случайный процесс броуновского движения.

Тема 8.4 Математическая статистика

Выборка, вариационный ряд выборки, статистика. Несмещенность, состоятельность, оптимальность, эффективность статистической оценки. Достаточная статистика, статистическая гипотеза, параметрическая гипотеза, линейная регрессия, метод наименьших квадратов.

РАЗДЕЛ IX. Дифференциальные уравнения

Тема 9.1 Основные понятия

Обыкновенные дифференциальные уравнения, поле направлений, решение, интегральная кривая, задача Коши.

Тема 9.2 Уравнения 1-го порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, уравнения Риккати и в полных дифференциалах. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Тема 9.3 Системы дифференциальных уравнений.

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегралы и первые интегралы нормальной системы. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

Тема 9.4 Теоремы существования.

Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Тема 9.5 Линейные уравнения и системы n–го порядка

Фундаментальная система решений однородных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 9.6 Автономные системы дифференциальных уравнений.

Особые точки автономных систем: узел, седло, фокус, центр.

Тема 9.7 Особые точки и устойчивость

Устойчивость решений по Ляпунову, функции Ляпунова.

РАЗДЕЛ X. Уравнения математической физики

Тема 10.1 Введение в уравнения математической физики

Основные понятия уравнений математической физики. Постановка краевых задач. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Корректные и некорректные краевые задачи. Пример Адамара. Классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных. Теорема Коши-Ковалевской.

Тема 10.2 Гиперболические уравнения математической физики

Вывод уравнения поперечных колебаний струны. Решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны методом характеристик. Формула Даламбера. Решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве методом усреднения. Формула Кирхгофа. Решение задачи Коши на плоскости методом спуска. Формула Пуассона. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения и уравнения колебаний струны методом Дюамеля. Энергетическое неравенство для решений волнового уравнения. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Общая формальная схема метода разделения переменных решения смешанных задач для гиперболических уравнений. Задача Штурма-Лиувилля. Обоснование метода разделения переменных в случае классических решений.

Тема 10.3 Параболические уравнения математической физики

Вывод уравнения теплопроводности. Вывод уравнения диффузии. Вывод формулы Пуассона для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона для уравнения теплопроводности. Бесконечная скорость распространения тепла. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Непрерывная зависимость решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности от начальных и граничных условий. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.

Тема 10.4 Эллиптические уравнения математической физики

Интегральные формулы Грина. Собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Лемма о потоке тепла и теоремы о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций. Непрерывная зависимость решения задачи Дирихле от граничных условий. Обратная теорема о среднем значении и теорема о сходимости гармонических функций. Теорема об устранимой особенности гармонической функции. Гладкость гармонических функций. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом Фурье. Формула Пуассона для первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для шара. Обоснование формулы Пуассона для шара в случае непрерывных граничных условий. Задача Дирихле для уравнения Лапласа для внешности шара. Единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Оценка производных гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешней задачи Неймана для уравнения Пуассона.

РАЗДЕЛ XI. Вычислительная математика

Тема 11.1 Приближение функций и численное интегрирование

Понятие погрешности. Методы приближения функций. Приближенное вычисление интегралов.

Тема 11.2 Системы линейных алгебраических уравнений и проблема собственных значений

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы решения проблемы собственных значений.

Тема 11.3 Системы нелинейных уравнений

Методы численного решения систем нелинейных уравнений. Линейная и квадратичная скорость сходимости.

Тема 11.4 Разностные схемы и их применение

Основные понятия теории разностных схем (сетка, устойчивость, сходимость, аппроксимация). Разностные схемы для уравнений в частных производных.

РАЗДЕЛ XII. Методы оптимизации

Экстремум, локальный экстремум, условный экстремум функции. Функция Лагранжа. Вариационная задача. Производные в векторных пространствах: производная по направлению, вариация по Лагранжу. Выпуклые множества, выпуклые функции, выпуклые экстремальные задачи. Линейная задача, двойственная задача.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Алгебра

1. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
2. Кольцо многочленов от одной переменной. Корень многочлена, теорема Безу, кратность корня. Неприводимые многочлены над $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов.
3. Матрицы и алгебраические операции над ними. Ранг матрицы и его основные свойства. Обратная матрица, критерий существования и методы ее вычисления. Жорданова нормальная форма матрицы.
4. Определители, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Определитель произведения квадратных матриц.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Критерий совместности. Методы Гаусса и Крамера. Размерность и базис пространства всех решений однородной системы линейных уравнений.
6. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Подпространства и операции над ними: пересечение, сумма, прямая сумма.
7. Линейное отображение векторных пространств, его ядро и образ. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и композиции линейных операторов. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы.
8. Билинейные, квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Геометрия

9. Свободные векторы в $\mathbf{R}^3$, скалярное, векторное и смешанное произведения.
10. Различные виды уравнений прямой и плоскости в $\mathbf{R}^2$ и в $\mathbf{R}^3$.
11. Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства. Классификация кривых второго порядка в $\mathbf{R}^2$.
12. Евклидовы точечные пространства $\mathbf{R}^n$. Ортогональность плоскостей в $\mathbf{R}^n$. Расстояние от точки до плоскости в $\mathbf{R}^n$.

Топология

13. Топологическое пространство. Способы задания топологий, сравнение топологий. Внутренность, замыкание, граница множества в топологическом пространстве.

14. Непрерывные отображения топологических пространств и их свойства. Гомеоморфизм.
15. Компактные и связные топологические пространства. Критерии компактности метрического пространства.

Дифференциальная геометрия

16. Кривые в $\mathbf{R}^2$ и в $\mathbf{R}^3$ и способы их задания. Натуральная параметризация кривой.
17. Кривизна и кручение кривой, их геометрический смысл. Формулы Френе.
18. Поверхности в $\mathbf{R}^3$ и способы их задания. Первая фундаментальная форма поверхности и задачи, решаемые с ее помощью.
19. Нормальная кривизна поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Полная (гауссова) кривизна.

Математический анализ

20. Вещественные числа и их основные свойства. Поле вещественных чисел. Важнейшие подмножества в $\mathbf{R}$ и их мощность. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел.
21. Числовые множества и их границы. Теорема о существовании точных границ.
22. Предел последовательности и его свойства (единственность, операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах). Теорема о пределе монотонной последовательности. Число Эйлера.
23. Критерий Коши сходимости последовательности. Предельная точка множества в $\mathbf{R}$, лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
24. Лемма Бореля-Лебега о покрытиях отрезка интервалами. Теорема о стягивающейся последовательности отрезков.
25. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа (о конечных приращениях), Коши (об отношении приращений).
26. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.
27. Формула Тейлора, остаточные члены в форме Пеано, Лагранжа, Коши.
28. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу, критерий Лебега интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
29. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции, формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле.
30. Понятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов. (Коши с корнем, Даламбера, Гаусса).
31. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Признаки Дирихле и Абеля.

32. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости.
33. Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Классы поточечной сходимости рядов Фурье.
34. Дифференцируемые отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$. Матрица Якоби.
35. Локальные экстремумы функций одной и многих переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции.
36. Условный экстремум. Необходимые, достаточные условия. Метод множителей Лагранжа.
37. Теоремы о неявной и обратной функциях, условия их дифференцируемости и формулы для производных.
38. Криволинейные интегралы и их основные свойства. Формула Грина.
39. Поверхностные интегралы, формула Стокса, формула Гаусса-Остроградского.

Теория функций комплексного переменного

40. Производная от функции комплексного переменного и ее геометрический смысл. Условия Коши-Римана.
41. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
42. Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Свойства аналитических функций.
43. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки и их классификация. Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов.
44. Понятие конформного отображения и его связь со свойством аналитичности. Теорема Римана о конформных отображениях. Принцип соответствия границ.

Функциональный анализ

45. Продолжение меры по Лебегу. Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса.
46. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
47. Пространства со скалярным произведением, гильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
48. Пространства $L^p(T,\mu)$, неравенства Гёльдера, Минковского, полнота.
49. Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений) и его применения к интегральным уравнениям.
50. Разложение по ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве.
51. Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Примеры.
52. Теорема о замыкании образа линейного непрерывного оператора. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
53. Теорема Хана—Банаха о продолжении функционалов.

Теория вероятностей

54. Аксиоматика Колмогорова. Условные вероятности.
55. Числовые характеристики случайных величин - математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции и их свойства.
56. Критерии независимости случайных величин (дискретный, абсолютно непрерывный).
57. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.

Дифференциальные уравнения

58. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка
59. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков
60. Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи
61. Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
62. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
63. Теорема Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
64. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.
65. Линейные однородные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка и основные теоремы об их решениях.
66. Линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.
67. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
68. Автономные системы дифференциальных уравнений
69. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы Ляпунова.

Уравнения математической физики

70. Постановка краевых задач. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
71. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами.
72. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.
73. Корректные и некорректные краевые задачи. Пример Адамара.
74. Решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны методом характеристик. Формула Даламбера.
75. Решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве методом усреднения. Формула Кирхгофа.
76. Решение задачи Коши на плоскости методом спуска. Формула Пуассона.

77. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения и уравнения колебаний струны методом Дюамеля.
78. Энергетическое неравенство для решений волнового уравнения. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
79. Общая формальная схема метода разделения переменных решения смешанных задач для гиперболических уравнений. Задача Штурма-Лиувилля.
80. Обоснование метода разделения переменных в случае классических решений.
81. Вывод формулы Пуассона для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона для уравнения теплопроводности.
82. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
83. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.
84. Принцип максимума для гармонических функций. Непрерывная зависимость решения задачи Дирихле от граничных условий.
85. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом Фурье. Формула Пуассона для первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге.
86. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
87. Задача Дирихле для уравнения Лапласа для внешности шара. Единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
88. Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

Вычислительная математика

89. Основные вычислительные схемы метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
90. Метод итераций и общий неявный метод итераций для систем линейных алгебраических уравнений, теорема о сходимости.
91. Метод итераций для систем нелинейных уравнений, теорема о сходимости. Метод Ньютона для операторных уравнений, теорема о сходимости.
92. Метод Эйлера для решения задачи Коши в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, сходимость метода. Метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши в случае дифференциального уравнения первого порядка, четырехточечное правило.
93. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью.
94. Явная и неявная двухслойная четырехточечная разностная схема для уравнения теплопроводности, условия устойчивости.

Методы оптимизации

95. Необходимое условие экстремума в классической вариационной задаче (уравнение Эйлера-Лагранжа).
96. Метод множителей Лагранжа.
97. Производные в векторных пространствах (производная по направлению, вариация по Лагранжу).
98. Условия оптимальности первого и второго порядков в задаче оптимизации с ограничениями-равенствами (задача условной оптимизации).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В.А. Математический анализ. - М., Наука, Т.1 - 1981, Т.2 - 1984.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. - М., Наука, Т.1,2 - 1983 и др. издания.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М., Высшая школа, Т.1,2 - 1981 и др. издания.
4. Рудин У. Основы математического анализа. - М., Мир. - 1976.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М., Наука - 1969 и др. издания.
6. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М., Наука - 1977 и др. издания.
8. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, 1991.
9. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1974.
10. Федорюк М.В. Обыкновенных дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1985.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1992.
12. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения.Учебник. Минск, БГУ, 2006.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
14. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.
15. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
16. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1979.
17. 6. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П.Теория вероятностей, Минск, БГУ, 2003.
18. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач, 1989.
19. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 432 с.
20. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. - 352 с.
21. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984.
22. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1988.
23. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 2005.
24. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1987
25. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. -М.: Наука, 1999.