Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

____

В.Г.Сафонов

31.05.2018

____

ПРОГРАММА

вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Минск, 2018

СОСТАВИТЕЛИ:

Д.Г.Медведев, декан механико-математического факультета, кандидат физ.-мат.наук, доцент;

В.В.Беняш-Кривец, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации, доктор физ.-мат. наук, профессор;

В.И.Янчевский. профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Б;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета (протокол № 9 от 18 апреля 2018 г.)

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 8 от 4 апреля 2018 г.)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 7 от 29 мая 2018 г.)

Ответственный за редакцию В.В.Беняш-Кривец

Ответственный за выпуск В.В.Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На вступительном экзамене в аспирантуру по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел поступающий должен

знать:

– определения математических понятий, участвующих в формулировках теорем, которые он излагает;

– точные формулировки математических теорем;

– формулировки лемм и теорем, используемых при доказательствах.

уметь:

– применять теорию к решению задач и иллюстрировать определения математических понятий и формулировки теорем простыми примерами;

– проверять выполнимость условий теорем, применяемых при доказательствах.

Члены экзаменационной комиссии могут предлагать студенту в качестве дополнительных вопросов разбор простых примеров, определения и формулировки теорем из программы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел.

Делимость целых чисел и ее свойства. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа, критерий взаимной простоты. Наименьшее общее кратное. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Теоретико-числовая функция Эйлера, ее мультипликативность. Полная и приведенная системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках. Кольцо классов вычетов.

Тема 2. Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры.

Алгебраическая операция. Свойства алгебраической операции: коммутативность и ассоциативность. Нейтральный элемент. Теорема о единственности нейтрального элемента. Симметричные элементы множества относительно алгебраической операции. Теорема о единственности симметричного элемента относительно ассоциативной алгебраической операции.

Тема 3. Поле комплексных чисел.

Определение поля комплексных чисел. Действия в компонентах. Алгебраическая форма комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра и ее применение в вещественных вычислениях. Геометрическая интерпретация действий с комплексными числами. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы, первообразные корни из единицы. Группа корней из единицы.

Тема 4. Матрицы и операции над ними.

Понятие матрицы. Операции над матрицами. Свойства матричных операций. Многочлен от матрицы.

Тема 5. Перестановки и подстановки.

Определения перестановок и подстановок, их число. Инверсии и порядки, четность перестановки. Транспозиции и циклы. Умножение подстановок и его свойства. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и транспозиций. Четность подстановки. Симметрическая и знакопеременная группы.

Тема 6. Определители и их применение.

Определитель квадратной матрицы и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке и столбцу. Методы вычисления определителей. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица, методы ее вычисления. Невырожденные матрицы, полная линейная группа. Теорема Крамера. Метод Гаусса.

Тема 7. Многочлены от одной переменной.

Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Алгоритм Евклида. Разложение многочлена на неприводимые множители. Значение многочлена в точке. Теорема Безу. Схема Горнера. Корень многочлена, теорема о числе корней. Кратные корни и производная. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел.

Тема 8. Многочлены от нескольких переменных.

Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографический порядок. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.

Тема 9. Векторные пространства.

Определение и примеры. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность. Ранг матрицы как размерность линейной оболочки ее строк, столбцов. Эквивалентность разных определений ранга. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма и дополнение подпространств.

Тема 10. Системы линейных уравнений.

Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Число решений линейной системы. Однородные системы, условия существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства системой линейных уравнений.

Тема 11. Линейные отображения векторных пространств.

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного отображения. Алгебраические действия над линейными отображениями. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Условия обратимости оператора.

Тема 12. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения.

Инвариантное подпространство. Собственные значения и собственные векторы оператора. Характеристический многочлен оператора, теорема Гамильтона–Кэли.

Тема 13. Жорданова нормальная форма матриц.

Жорданова матрица. Корневой вектор и корневое подпространство. Нильпотентный оператор, его характеристический многочлен. Построение жордановой матрицы нильпотентного оператора. Жорданова матрица произвольного оператора.

Тема 14. Билинейные и квадратичные формы.

Линейная форма, двойственное пространство. Двойственные базисы. Билинейная и полуторалинейная форма на линейном пространстве, их матрица. Матрица Грама, ранг формы. Эрмитовы и симметрические билинейные формы, их матрицы Грама. Ортогональность относительно билинейной симметрической формы, существование ортогонального базиса. Квадратичная форма и ее матрица. Квадратичная форма как однородный многочлен. Канонический вид. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы. Полуторалинейные и эрмитовы формы.

Тема 16. Евклидовы и унитарные пространства.

Определение евклидова и унитарного пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортонормированные семейства векторов. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом или унитарном пространстве. Разложение пространства в ортогональную прямую сумму.

Тема 17. Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств.

Сопряженный оператор, его существование и свойства. Инвариантные подпространства для сопряженных операторов. Условие ортонормальной диагонализуемости оператора. Нормальный оператор в унитарном и евклидовом пространстве. Унитарные и ортогональные операторы, канонический вид их матриц. Унитарная и ортогональная группы. Самосопряженный оператор. Существование ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к диагональному виду. Пары форм. Полярное разложение.

Тема 18. Введение в теорию групп.

Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента. Порождающие множества. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа, разложение Лагранжа, следствие о порядке элемента. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Ядро и образ гомоморфизма.

Первая (основная) теорема о гомоморфизмах, ее применение к вычислению факторгруппы. Связь подгрупп факторгруппы и промежуточных подгрупп. Вторая и третья теоремы о гомоморфизмах. Прямое произведение групп и разложение группы в прямое произведение своих подгрупп. Свободные абелевы группы. Теорема о строении конечно порожденной абелевой группы. Центр и коммутант. Критерий абелевости факторгруппы.

Тема 19. Введение в теорию колец и полей.

Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Мультипликативная группа кольца. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Главные идеалы. Идеалы в $K[x]$ и $\mathbf{Z}$. Максимальные идеалы и соответствующие им факторкольца. Внутреннее и внешнее прямое произведение колец. Строение кольца $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ и арифметические следствия. Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Алгебраические расширения, алгебраичность конечного расширения. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание. Поле частных кольца без делителей нуля. Число элементов конечного поля. Теорема о существовании и единственности поля, содержащего p^n элементов. Подполя конечного поля. Мультипликативная группа конечного поля. Неприводимые многочлены над конечным полем.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

1. Теорема о делении с остатком для целых чисел. Алгоритм Евклида. НОД и НОК целых чисел. Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты.
2. Простые числа, теорема Евклида. Основная теорема арифметики.
3. Сравнения. Классы вычетов по модулю n. Функция Эйлера, ее мультипликативность и вычисление. Теоремы Эйлера и Ферма.
4. Кольцо классов вычетов Z_m. Обратимые элементы в Z_m. Критерий того, что Z_m — поле.
5. Алгебраическая операция. Теорема об ассоциативной алгебраической операции. Теоремы о нейтральном и симметричном элементе.
6. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения, их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
7. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
8. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы.
9. Матрицы и действия над ними. Свойства операций над матрицами.
10. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
11. Перестановки и подстановки. Транспозиции и циклы. Умножение подстановок. Симметрическая группа. Разложение подстановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов. Четность подстановки.
12. Определители. Теорема о перестановке строк в определителе. Свойства определителей порядка n. Определитель транспонированной матрицы. Определитель Вандермонда.
13. Теорема об определителе произведения матриц. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке и столбцу.
14. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
15. Неприводимые многочлены и их свойства. Разложение многочлена на неприводимые множители. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
16. Неприводимые многочлены над □ и □. Каноническое разложение многочленов из □$[x]$ и □$[x]$.

17. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода, преобразование координат вектора.
18. Подпространства и операции над ними: пересечение, сумма, прямая сумма. Методы задания подпространств.
19. Ранг системы векторов. Ранг матрицы как размерность линейной оболочки ее строк, столбцов. Эквивалентность разных определений ранга.
20. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условия существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем.
21. Линейное отображение векторных пространств, его ядро и образ. Ранг и дефект. Операции над линейными отображениями. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.
22. Инвариантное подпространство. Собственные значения и собственные векторы оператора. Характеристический многочлен оператора, теорема Гамильтона–Кэли.
23. Клетка Жордана. Жорданова матрица. Нильпотентный оператор, его характеристический многочлен. Построение жордановой матрицы нильпотентного оператора. Жорданова матрица произвольного оператора.
24. Линейные формы на векторном пространстве. Двойственное векторное пространство. Дуальный базис. Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы.
25. Связь между матрицами билинейной формы в разных базисах. Ранг билинейной формы. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Матрица квадратичной формы и ее изменение при изменении базиса. Ранг квадратичной формы.
26. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы. Канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
27. Нормальный вид комплексной и действительной квадратичной формы. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.
28. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

29.Полуторалинейные формы. Матрица полуторалинейной формы. Эрмитовы и косоэрмитовы полуторалинейные формы и их матрицы. Изменение матрицы полуторалинейной формы при изменении базиса. Ранг полуторалинейной формы.
30.Квадратичные и эрмитовы квадратичные формы на комплексном векторном пространстве. Нормальный вид эрмитовой квадратичной формы. Знакоопределенные эрмитовы квадратичные формы. Критерии положительной (отрицательной) определенности.
31.Евклидовы и унитарные векторные пространства. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Угол между векторами в евклидовом пространстве.
32.Ортогональные векторы и их свойства. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Теорема о разложении евклидова (унитарного) векторного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
33.Оператор, сопряженный к данному оператору евклидова (унитарного) пространства. Теорема о существовании и единственности сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе. Свойства сопряженного оператора пространства.
34.Ортогональные операторы. Невырожденность ортогонального оператора. Критерий ортогональности оператора. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе.
35. Собственные значения ортогонального оператора. Ортогональные операторы 1 и 2-мерных векторных пространств. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Следствие для ортогональных матриц.
36. Самосопряженные операторы евклидовых векторных пространств. Матрица самосопряженного оператора. Собственные векторы самосопряженного оператора. Следствие для симметрических матриц.
37. Нормальные операторы в унитарном пространстве. Теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального оператора. Критерий нормальности оператора. Матрица нормального оператора в подходящем ортонормированном базисе.
38. Унитарные операторы. Невырожденность унитарного оператора. Критерий унитарности оператора. Матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе. Нормальность унитарного оператора. Канонический вид матрицы унитарного оператора. Следствие для матриц.
39.Определение группы, подгруппы. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп, их свойства. Порядок элементов группы, его свойства. Циклические подгруппы, их порядок.

40. Циклические группы, их классификация с точностью до изоморфизма. Подгруппы циклических групп.
41. Смежные классы, их свойства. Критерий равенства смежных классов. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее.
42. Нормальные подгруппы. Нормальность ядра гомоморфизма. Фактор-группа, канонический гомоморфизм. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
43. Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Критерий разложимости группы в прямое произведение двух подгрупп. Разложение циклической группы в прямое произведение.
44. Коммутант группы.
45. Свободные абелевы группы. Теорема о согласованных базисах. Строение конечно порожденных абелевых групп.
46. Определение кольца, поля, подкольца, подполя. Примеры. Мультипликативная группа кольца. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец, их свойства. Ядро гомоморфизма.
47. Идеалы колец. Примеры. Ядро гомоморфизма — идеал. Факторкольцо. Основная теорема о гомоморфизмах колец.
48. Главные идеалы. $\mathbf{Z}$ и $K[x]$ — кольца главных идеалов.
49. Максимальные идеалы. Факторкольца по максимальным идеалам. Теорема о максимальных идеалах в $\mathbf{Z}$ и $K[x]$ и следствие из нее.
50. Внешняя и внутренняя прямая сумма колец. Разложение кольца $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ в прямую сумму.
51. Характеристика поля. Свойства полей положительной характеристики. Степень расширения полей. Мультипликативность степени.
52. Простое подполе. Простые подполя в полях нулевой и положительной характеристики.
53. Алгебраические и трансцендентные элементы, минимальный многочлен и его свойства. Алгебраичность конечного расширения полей.
54. Простые алгебраические и трансцендентные расширения полей.
55. Теорема о существовании корня многочлена. Алгебраически замкнутые поля. Теорема Штейница.
56. Конечные поля, их характеристика. Число элементов в конечном поле. Существование и единственность поля из p^n элементов.
57. Теорема о конечной мультипликативной подгруппе в поле. Примитивные элементы конечного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. Мн.: Амалфея, 2001.
2. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. Мн.: Амалфея, 2001.
3. Беняш-Кривец В.В., Мельников О.В. Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: пособие для студ. факультета прикладной математики и информатики и механико-математического факультета. Минск: БГУ, 2009. 116 с.
4. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Т. 1—3. М.: Физ.—мат. литература, 2000—2001.Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1988.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
8. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал—пресс, 2001.
9. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1976.
10. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
11. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.