Регулярные три-ткани, определяемые плюригармоническими функциями

Л.М. Пиджакова

Тверской государственный технический университет, 170000, Россия, Тверь, наб. А.Никитина, 22
lpidjhacova@mail.ru

В работе [1] рассматриваются решения вида $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$ некоторых уравнений в частных производных. В частности, найдены гармонические функции такого строения. На плоскости (XOY) указанные функции определяют, как известно [2], [3], регулярные три-ткани.

Целью данной работы является обобщение полученных результатов для плюригармонических функций вида

$$u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n). \tag{1}$$

С одной стороны, функции (1) определяют в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ переменных (x_i, y_i) $(2n+1)$ -ткани, образованные $2r$ слоениями $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и слоением $u = \text{const}$. Уравнения $x_i = \text{const}$ и $y_i = \text{const}$ определяют гиперплоскости в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, а уравнение $u = \text{const}$ – гиперповерхность. Указанные $(2n + 1)$ -ткани называются регулярными, если функция (1) имеет следующее строение

$$u = f\left(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_1(x_n) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_n(y_n)\right). \tag{2}$$

С другой стороны, уравнение (1) определяет в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ три-ткань $W(r, r, 2r-1)$ со слоениями различной размерности: два r-параметрических слоения $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и однопараметрическое слоение размерности $2r - 1$ – $u = \text{const}$. И в этом случае ткань будет регулярной, если функция (1) имеет вид

$$u = f\left(\varphi(x_i) + \psi(y_i)\right). \tag{3}$$

Функция вида (1) называется плюригармонической, если выполняются следующие условия [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_i}.$$

Доказана

Теорема 1. $(2n + 1)$ - *ткани, определяемые плюригармоническими функциями вида (2) являются регулярными тогда и только тогда, когда эти функции имеют вид*

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i^2 - y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + k, \quad a_i, b_i, c_i, k \in \mathbf{R}.$$

Доказана

Теорема 2. *Криволинейные три-ткани, определяемые плюригармоническими функциями вида (3) являются регулярными тогда и только тогда, когда эти функции имеют вид*

$$\begin{aligned} u = &c_1 \ln \left(b + \frac{r}{p} \cos\left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) + \frac{s}{p} \sin\left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) + \right. \\ &\left. + \frac{u}{p} \coth\left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) + \frac{v}{p} \sinh\left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \right) + c_2 \end{aligned}$$

или

$$u = c_1 \ln \left(b + a_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + b_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right)^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) + c_2.$$

Литература

1. А. М. Шелехов. О "шестиугольных"решениях некоторых уравнений в частных производных. Proceedings of the International Geometry Center Vol. 10, no. 2 (2017) pp. 47–55.

2. В. Бляшке. Введение в геометрию тканей. М., Физматгиз, 1956, 144 с.

3. Шелехов А. М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. Криволинейные три-ткани. Тверь, 2013, 237 с.

4. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч.II. Функции нескольких переменных. М., Наука, 1985, 464 с.