Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

____

В.Г.Сафонов

31.05.2018

ПРОГРАММА

вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.07 «Вычислительная математика»

Минск, 2018

СОСТАВИТЕЛИ:

Д.Г.Медведев, декан механико-математического факультета, кандидат физ.-мат.наук, доцент;

А.В.Лебедев, заведующий кафедрой функционального анализа и аналитической экономики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

В.М.Волков. профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Н.И.Юрчук, профессор кафедры математической кибернетики, доктор физ.-мат. наук, профессор;

М.В.Игнатенко, доцент веб-технологий и компьютерного моделирования, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета (протокол №7 от 23 апреля.2018 г.)

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 9 от 20 апреля 2018 г.)

Кафедрой математической кибернетики(протокол № 9 от 29 апреля 2018 г.)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 7 от 29 мая 2018 г.)

Ответственный за редакцию В.М.Волков

Ответственный за выпуск М.В.Игнатенко

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

На вступительном экзамене в аспирантуру по специальности 01.01.07 – вычислительная математика поступающий должен

знать:

- математические основы и базовые концепции теории приближения функций, численных алгоритмов линейной алгебры, анализа, уравнений математической физики;
- особенности и назначение численных методов, предпосылки для их многообразия;
- математическую постановку задач, приводящих к задачам вычислительной математики;
- основные задачи вычислительной математики, сущность проблемы устойчивости и сходимости приближенных численных методов.

уметь:

- конструировать численные алгоритмы на основе базовых численных методов, проводить сравнительный анализ их точности и вычислительной сложности, приводить конкретный метод к канонической форме при наличии таковой;
- доказывать устойчивость базовых численных алгоритмов, оценивать порядок точности полиномиальной аппроксимации, квадратурных формул, разностных схем;
- Приводить примеры, иллюстрирующие основные понятия численных теории численных методов.

Члены экзаменационной комиссии могут предлагать абитуриенту в качестве дополнительных вопросов дать формулировки определений основных понятий (абсолютная и относительная погрешности, устойчивость, сходимость, консервативность и т.д.). Отвечая на вопрос, касающийся численных методов для определенного круга задач, абитуриент должен иметь достаточные представления о математической постановке данного класса задач. Например, говоря о численных методах для задач математической физики, требуется знание основных типов уравнений, краевых условий, понятие о корректности постановки задачи и т.п.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

1. Элементы теории погрешностей

Абсолютная и относительная погрешности. Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Погрешности арифметических операций. Прямая и обратная задача теории погрешностей. Формат компьютерного представления действительных чисел и погрешность арифметических операций. Примеры неустойчивых алгоритмов и катастрофической потери точности.

2. Интерполирование и численное дифференцирование функций

Постановка задачи интерполирования, сходимость интерполяционных формул, равномерная сходимость и сходимость в среднем. Системы функций Чебышева. Интерполяционный полиномы в форме Лагранжа и Ньютона. Оценки остаточных членов интерполяционных полиномов и их минимизация. Интерполяция сплайнами. Полиномы Чебышева и тригонометрические полиномы. Приближение функций методом наименьших квадратов. Теорема о наилучшем приближении функции в гильбертовом пространстве. Понятие о численном интерполировании функций многих переменных. Численное дифференцирование функций и оценка его погрешности.

3. Вычисление определенных интегралов

Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Гаусса. Правило Рунге практической оценки погрешности.

4.Численные методы решения систем ЛАУ

Нормы векторов и матриц. Энергетическая норма вектора. Согласованность и подчиненность норм. Оценка относительной погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Обусловленность матриц и систем ЛАУ. Методы типа Гаусса. LU факторизация и разложение Холецкого. Метод простой итерации, выбор оптимального итерационного параметра и оценка числа итераций. Понятие о переобуславливателе (методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации). Понятие о чебышевском оптимальном наборе итерационных параметров. Методы минимальных невязок, наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

5. Вычисление собственных значений и векторов матриц

Свойства собственных значений и собственных векторов. Преобразование подобия. Метод Данилевского. Итерационный степенной метод и метод плоских вращений. Понятие о треугольном степенном методе и QR–алгоритме.

6. Решение нелинейных уравнений и систем.

Метод бисекций и метод простой итерации. Условия и скорость сходимости метода простой итерации. Метод Ньютона и его модификации. Геометрическая интерпретация метода Ньютона и метода секущих. Методы нелинейной оптимизации.

7. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Одношаговые методы Эйлера и Рунге-Кутты. Многошаговые методы. Методы Адамса (явный и неявный). Устойчивость разностного метода и условие корней. Понятие о жестких системах и А-устойчивости. Метод Гира.

8. Численные методы решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод редукции к задаче Коши (дифференциальная прогонка и метод стрельбы). Разностный метод решения краевых задач. Проекционные методы, метод Галеркина. Основные понятия теории разностных схем, разностные аналоги формул Грина и теоремы вложения сеточных норм. Собственные значения оператора второй разностной производной. Сходимость разностной схемы. Понятие о консервативности.

9. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики

Сетка, шаблон, разностная схема. Устойчивость разностных схем. Невязка, порядок аппроксимации и скорость сходимости. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчивости. Условная и безусловная устойчивость. Схема Кранка-Николс и Дюфорта-Франкела, условная аппроксимация. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Разностные схемы для эллиптических задач. Принцип максимума. Метод разделения переменных и метод Фурье. Алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье. Понятие об экономичных численных методах решения многомерных задач математической физики. Методы дробных шагов.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

1. Абсолютная и относительная погрешности. Значащие и верные цифры.
2. Прямая и обратная задача теории погрешностей.
3. Компьютерное представление действительных чисел и погрешность арифметических операций. Примеры катастрофической потери точности компьютерной арифметики.
4. Постановка задачи интерполирования. Системы функций Чебышева.
5. Интерполяционный полиномы в форме Лагранжа и Ньютона.
6. Оценки остаточных членов интерполяционных полиномов и их минимизация.
7. Тригонометрические полиномы и полиномы Чебышева. Равномерная сходимость и сходимость в среднем.
8. Интерполирование сплайнами. Понятие о В-сплайнах.
9. Приближение функций методом наименьших квадратов.
10. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.
11. Численное дифференцирование функций и оценка погрешности разностного дифференцирования.
12. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
13. Правило Рунге практической оценки погрешности.
14. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Гаусса
15. Нормы векторов и матриц. Согласованность и подчиненность норм. Обусловленность и подчиненность норм.
16. Оценка относительной погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Число обусловленности матриц.
17. Методы типа Гаусса. LU факторизация и разложение Холецкого.
18. Метод простой итерации, выбор оптимального итерационного параметра и оценка числа итераций.
19. Понятие о переобуславливателе (методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации).
20. Понятие о чебышевском оптимальном наборе итерационных параметров.
21. Методы минимальных невязок, наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.
22. Свойства собственных значений и собственных векторов. Преобразование подобия.
23. Полная проблема собственных значений. Метод Данилевского.

24. Итерационный степенной метод и метод плоских вращений.
25. Метод простой итерации для нелинейных уравнений. Теорема о сходимости.
26. Метод Ньютона и его модификации. Квадратичная сходимость.
27. Одношаговые методы решения задачи Коши. Методы Эйлера и Рунге-Кутты.
28. Многошаговые методы решения задачи Коши. Методы Адамса.
29. Устойчивость методов решения задачи Коши. Условие корней.
30. Понятие о жестких системах и А-устойчивости. Метод Гира.
31. Методы редукции краевых задач к задаче Коши (дифференциальная прогонка и метод стрельбы).
32. Разностный метод решения краевых задач на примере уравнения второго порядка.
33. Проекционные методы. Метод Галеркина.
34. Основные понятия теории разностных схем, разностные аналоги формул Грина и теоремы вложения сеточных норм.
35. Собственные значения оператора второй разностной производной с однородными краевыми условиями.
36. Устойчивость разностных схем. Порядок аппроксимации и скорость сходимости.
37. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Явные и неявные схемы.
38. Спектральный признак устойчивости. Условная и безусловная устойчивость.
39. Схема Кранка-Николс и Дюфорта-Франкела. Условная аппроксимация.
40. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем.
41. Разностные схемы для эллиптических задач. Принцип максимума.
42. Метод разделения переменных и метод Фурье. Алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.
43. Понятие об экономичных численных методах решения многомерных задач математической физики. Методы дробных шагов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков — М.: Наука, 1987. 632 с.
2. *Самарский А.А., Гулин В.А.* / Численные методы. М., Наука. 1989.432 с.
3. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. 512 с.
4. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — Мн.: Наука и техника, 1982. 286 с.
5. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — Мн.: Наука и техника, 1986. 311 с.
6. *Самарский, А. А.* Введение в численные методы / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1987. 288 с.
7. *Самарский, А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М.: Наука, 1987. 600 с.
8. *Ортега Дж.*, Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986, 288 с.
9. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. П. Фаддеева. — М.: Физматгиз, 1963. 386 с.