ГЕОМЕТРИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
на международный Геометрический семинар Ведерников–100

П.П. Забрейко[1]

[1]Белгосуниверситет, механико-матем атический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь zabreiko@mail.ru

Геометрия и функциональный анализ многими математиками воспринимаются как далекие друг от друга области. По моему мнению, это совершенно не соответствует действительности.

1. Обычно считается, что П. Ферма и Р. Декарт открыли новый мощный метод решения геометрических задач. Это не так. Фактически они построили новую модель для геометрии Евклида. Если в аксиоматической модели Евклида точки, прямые, плоскости описывались достаточно наглядными аксиомами, то те же объекты в модели Ферма и Декарта описывались числами и уравнениями. С одной стороны, это описание объектов геометрии во многих случаях оказалось более эффективным. Однако с другой стороны, новое описание потеряло наглядность и, более того, создало у некоторых математиков иллюзию, что геометрия является частью анализа (или даже алгебры), что, конечно, не верно.

2. Аксиоматическая модель геометрии Евклида была адекватно описана лишь в конце XIX века Д. Гильбертом. И он же обнаружил, что рассуждения и конструкции, которые используются в обоих моделях геометрии Евклида широко используются далеко за пределами классической геометрии. Ему и его последователям удалось построить новую геометрическую модель (теория гильбертовых пространств), которая содержала в себе не только классическую геометрию Евклида, но и соответствующую многомерную и даже бесконечномерную геометрию. При этом все основные теоремы евклидовой геометрии (например, теоремы о перпендикулярах, теорема Пифагора, теория углов и др.) полностью сохраняли свою силу. Однако факты этой новой модели могли интерпретироваться как теоремы о линейных интегральных уравнениях, основные теоремы теории вероятностей, факты квантовой механики и т.д.

3. Основными объектами геометрии Евклида являются точки. Объектами теории гильбертовых пространств являются векторы. И потому евклидово пространство точек не может быть изоморфно гильбертовому пространству векторов — точки складывать нельзя, векторы можно. Отношения между этими двумя классами пространств были полностью прояснены Г. Вейлем только в XX веке. И эти связи оказались совсем простыми — они описываются одним отображением между декартовым квадратом евклидова точечного пространства и векторным пространством. При этом оказалось, что вся метрическая геометрия Евклида (включая теорию углов) полностью определяется абстрактным скалярным произведением векторов.

4. XIX век принес колоссальные изменения в понимании предмета геометрии. Во-первых, были открыты неевклидовы геометрии Лобачевского и Римана. Эти геометрии, отличаясь в целом от геометрии Евклида, тем не менее были локально евклидовыми (впрочем тут нужно заметить, что первая неевклидова геометрия, проективная, на практике появилась еще в XV веке в виде теории перспективы). Далее, Б. Риманом была предложена эффективная схема построения всевозможных локально евклидовых геометрий и возникла богатая идеями и приложениями риманова геометрия; классические пространства Евклида, Лобачевского и Римана оказались римановыми пространствами постоянной кривизны. При этом открытая существенно позднее упомянутая выше схема Г. Вейля, связывающая точечные и векторные пространства, оказалась простейшим случаем схемы Б. Римана. И, наконец, Ф. Клейном и С. Ли были вскрыты теоретико-групповые структуры геометрии, что навсегда связало геометрию и теорию групп преобразований.

5. Развитие геометрии в XX веке в первую очередь связано с именем С. Банаха, предложившим новый класс пространств (банаховы пространства), в которых отсутствует теория углов. Банаховы пространства оказалась идеальным объектом, для которого можно построить классический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление, вариационное исчисление, открытое Э. Картаном внешнее исчисление и т.д. Более того, теория банаховых пространств оказалась идеальным инструментом анализа различных классов уравнений и приближенных методов решения этих уравнений. Распространение идей Римана о конструировании из евклидова пространства локально евклидовых (римановых) пространств привело к возникновению геометрии Финслера и теории финслеровых пространств.

6. Основным объектом геометрии банаховых пространств является норма: с одной стороны она определяет инвариантную при сдвигах метрику и, с другой стороны, богатое семейство гиперплоскостей, позволяющей реализовать все основные геометрические рассуждения и построения. Многочисленные попытки построить геометрию пространств без нормы привели к созданию теории пространств Фреше, теории локально выпуклых пространств, теории топологических линейных пространств и др. Геометрия все этих пространств оказывается по мере все большей общности все более бедной (например, существуют пространства, в которых нет классических гиперплоскостей). Однако и эти пространства находят свои применения, например, теория обобщенных функций основана на геометрии локально выпуклых пространств.

7. Следует отметить одно чрезвычайно важное обстоятельство. Все описанные выше геометрии оказываются тесно связанными с полем вещественных чисел. Эта связь является наиболее зримой в вышеупомянутых схемах Г. Вейля и Б. Римана. Однако эти схемы могут быть реализованы и при замене поля вещественных чисел другим. В частности, при замене поля вещественных чисел полем комплексных чисел возникает богатая (и, как правило, более простая) комплексная геометрия. В настоящее время бурно развивается геометрия на основе p-адических чисел, конечных полей; более того, в физике находит применения геометрии, в которых вместо поля используются кватернионы и октонионы (их множества, обладающие многими свойствами числовых полей, полями уже не являются).

Литература

1. Гильберт Д.: *Основания геометрии.* М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1966.
3. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. *Геометрия.* Москва,: МЦНМО, 2007.
4. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы геометрии.* М.: ГИТТЛ, 1955.