

«МОН-2022»
XIV олимпиада по математике
среди студентов нематематических специальностей БГУ
28 апреля 2022 г.

Задача 1. Для действительной функции $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$ найдите: 1) область определения и область значений; 2) точки экстремума; 3) точки перегиба; 4) уравнения асимптот к графику $f(x)$.

Задача 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = 5$, и осью Ox , если $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((x-1) \operatorname{arctg}(x^n) \right)$. Постройте график функции $f(x)$.

Задача 3. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + 0,5x^2 - 11x + 12 = 0$.
Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$, если $x_3 > x_2 > x_1$.

Задача 4. Пусть функция задана формулой $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. При каких действительных значениях a, b, c, d для этой функции определена обратная функция?

Задача 5. На посевной компании экипажи тракторов А, В и С получили от председателя колхоза приказ: в максимально короткий срок сосредоточится в одном квадрате (точке) полевых угодий для повышения производительности пахотных работ. В момент получения приказа расстояния между тракторами были равны: $AB = 100$, $AC = 200$, $BC = 220$ км. Максимальные скорости тракторов равны: $|\vec{v}_A| = v_A = 15$, $|\vec{v}_B| = v_B = 20$, $|\vec{v}_C| = v_C = 12$ км/ч. Укажите направления движения тракторов для выполнения приказа.

Задача 6. На развилке двух дорог, одна из которых ведет в город А, где живут правдивые люди, а другая ведет в город В, где живут лгуны, студент БГУ встретил жителя одного из этих городов. Может ли студент БГУ за один вопрос выяснить у встреченного им жителя, какая из дорог ведет в город А? Вопрос должен задаваться в такой форме, чтобы ответом на него служили слова «да» или «нет». В ответе укажите формулировку вопроса или объясните, почему за один вопрос выяснить, какая из дорог ведет в город А нельзя.

Задача 7. Найдите ширину самой узкой полосы, покрывающей график функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^{n+1}} \right)$.

Задача 8. Ученый решал неоднородную систему из 10 уравнений с 12 переменными. В результате получилось, что в решении 3 свободных переменных. Можно ли утверждать, что при изменении правой части новая система всегда будет иметь решение.