

## ЗАДАНИЯ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

1 дистанционная учебная смена, 2024/2025 учебный год

1. Окружность радиуса  $6\sqrt{7}$  описана около остроугольного треугольника  $ABC$ . Через вершину  $B$  треугольника и центр окружности проведена прямая, которая пересекает  $AC$  в точке  $D$ . Из точки  $D$  на стороны  $AB$  и  $BC$  опущены перпендикуляры  $DK$  и  $DN$  соответственно. Найти  $KN$ , если  $AD:DC=5:7$ , а  $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

2. Решить неравенство

$$2 \cdot 5^x - 2^{x-1} - \sqrt{7 \cdot 10^x - 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 25^x} > 0.$$

3. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  утром отправляется по течению реки моторная лодка. В это же время из  $B$  в  $A$  навстречу выходит катер, собственная скорость которого в 1,4 раза больше собственной скорости моторной лодки. Лодка и катер встречаются в 12 часов дня. Лодка прибывает в пункт  $B$  не позднее 15 часов дня, а катер приходит в пункт  $A$  не раньше 15 часов. Определить время отправления лодки из  $A$  в пункт  $B$ , если известно, что на путь из  $B$  в  $A$  лодка затрачивает не более 9 часов, а катер на путь из  $A$  в  $B$  не менее 4 часов 30 минут.

4. Сумма квадратов цифр трёхзначного натурального числа меньше самого числа на 667. Определить все такие числа.

5. Сфера вписана в правильный тетраэдр  $SABC$  с ребром  $a = \sqrt{19}$ . Точка  $M$  – середина ребра  $SA$ , точка  $N$  делит ребро  $BC$  в отношении 2:1, считая от  $B$ . Прямая  $MN$  пересекает сферу в двух точках  $P$  и  $R$ . Найти длины отрезков  $MN$  и  $PR$ .

6. Найти значения параметра  $a$ , при каждом из которых всякий корень уравнения  $\sin(3x) = a \sin(x) + (4 - 2 \cdot |a|) \sin^2(x)$  является корнем уравнения  $\sin(3x) + \cos(2x) = 1 + 2 \sin(x) \cdot \cos(2x)$  и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.